# Procesos estocásticos 1
# Tarea-Examen 4

Profesor: Arrigo Coen Coria
Ayudante: Cristian Uriel Toriz Mendoza

Entrega tarea: Jueves 1 de junio

**Observación 1.** *Todas las respuestas tienen que estar bien argumentadas. Todos los problemas se deben de entregar.*

1. Sean $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ v.a.i.i.d. con $\mathbb{E}[Y_i] = 0$. Demuestre que $X_n$ es una martingala a tiempo discreto cuando $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ para $n \geq 1$.

2. Sean $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ v.a.i.i.d. con $\mathbb{E}[Y_i] = 1$. Demuestre que $X_n$ es una martingala a tiempo discreto cuando $X_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i$ para $n \geq 1$.

3. Sean $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con segundo momento finito (i.e., $\mathbb{E}[\xi_i] < \infty$). Sea $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Demostrar que son martingalas a tiempo discreto:

   *a)* $Z_n = X_n - n\mathbb{E}[\xi_1]$.

   *b)* $Z_n = X_n^2 - n\mathbb{E}\left[\xi_1^2\right]$.

4. Sean $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con $\mathbb{P}[\xi_n = 1] = p$ y $\mathbb{P}[\xi_n = -1] = q$ con $p + q = 1$. Sea $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, y definimos $Z_n = (q/p)^{X_n}$. Demostrar que $Z_n$ es martingala a tiempo discreto.

5. Sea $N_t$ un proceso Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Demuestre que los siguientes procesos $Y_t$ son martingalas a tiempo continuo:

   *a)* $Y_t = (N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$.

   *b)* $Y_t = \exp\{-\theta N_t + \lambda t(1 - e^{-\theta})\}$, para $\theta > 0$.

6. Demuestre que el movimiento Browniano es martingala.

7. Sea $B_t$ movimiento Browniano. Demuestre que los siguientes procesos también son movimientos Brownianos:

   *a)* $W_t = -B_t$.

   *b)* $W_t = \dfrac{1}{c} B_{c^2 t}$ con $c > 0$.

   *c)* $W_t = tB_{1/t}$ con $W_0 = 0$.

   *d)* $W_t = B_{t_0+t} - B_{t_0}$ con $t_0 > 0$.

8. Sea $B_t$ movimiento Browniano. Demuestre que lo siguiente:

   *a)* $\mathbb{E}[|B_t - B_s|] = \sqrt{\dfrac{2|t-s|}{\pi}}$.

   *b)* $\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right] = |t - s|$.

   *c)* $\mathbb{E}[B_s B_t] = \min\{s, t\}$.

   *d)* $Cov(B_s, B_t) = \min\{s, t\}$.

   *e)* $Corr(B_s, B_t) = \sqrt{s/t}$ para $0 \leq s \leq t$.

**La tarea examen es individual.**

¡SUERTE!