UNAM, Departamento de matemáticas

Breves notas de procesos estocásticos

(estas notas son un compendio de distintos resultados transcritos de diversos libros,

en ningún momento pretenden ser resultados del autor y son sin fines de lucro)

28 de mayo de 2017

Índice general

CAPÍTULO 1

RESULTADOS DE PROBABILIDAD

Proposición 1. *Sea X una v.a. y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, entonces*

1. $\mathbb{P}[X\in A]=\mathbb{P}\left[f(X)\in f(A)\right]$ *para* $A\in\mathscr{F}$.
2. *Si además f es creciente,* $\mathbb{P}[X\le x]=\mathbb{P}\left[f(X)\le f(x)\right]$ *para* $x\in\mathbb{R}$.
3. *Si además f es decreciente,* $\mathbb{P}[X\le x]=\mathbb{P}\left[f(X)\ge f(x)\right]$ *para* $x\in\mathbb{R}$.

Proposición 2. *Si X es independiente de Y y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ creciente y con inversa f^{-1}, entonces X es independiente $f(Y)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[X\le x, f(Y)\le z\right]&=\mathbb{P}\left[X\le x, Y\le f^{-1}(z)\right]\\&=\mathbb{P}[X\le x]\,\mathbb{P}\left[Y\le f^{-1}(z)\right]\\&=\mathbb{P}[X\le x]\,\mathbb{P}\left[f(Y)\le z\right]\end{aligned}$$

□

CAPÍTULO 2

PROCESO POISSON

2.1. INTRODUCCIÓN

Definición 1 (Proceso de conteo)**.** *Se dice que N_t es un proceso proceso de conteo si:*

1. $N_t \geq 0$.

2. $N_t \in \mathbb{N}$.

3. *Para $s < t$, $N_s \leq N_t$.*

4. *Para $s < t$, $N_t - N_s$ representa el número de eventos ocurridos en el intervalo $(s, t]$.*

Definición 2. *[Definición proceso Poisson 1] Sea $T_1, T_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes cada una con distribución* $\exp(\lambda)$. *El proceso de Poisson de parámetro λ es el proceso a tiempo continuo $\{N_t : t \geq 0\}$ definido por:*

$$N_t = \text{máx}\{n \geq 1 : T_1 + \ldots + T_n \leq t\}.$$

Definición 3. *[Definición proceso Poisson 1] Se dice que un proceso de conteo N_t es un proceso poisson de parámetro λ si:*

1. *$N_0 = 0$.*

2. *Tiene incrementos independientes.*

3. *El número de eventos en un intervalo de tamaño t se distribuye Poisson con media λt; es decir,*

$$\mathbb{P}\left[N_{t+s} - N_s = n\right] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Definición 4. *Se dice que una función es $o(h)$ si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Definición 5. *[Definición proceso Poisson 2] Se dice que un proceso de conteo N_t es un proceso poisson de parámetro λ si:*

1. *$N_0 = 0$.*

2. *Tiene incrementos estacionario e independientes.*

3. *$\mathbb{P}\left[N_h = 1\right] = \lambda h + o(h)$.*

4. *$\mathbb{P}\left[N_h \geq 2\right] = o(h)$.*

Theorema 1. *Las definiciones definición 2, definición 3 y definición 5 son equivalentes.*

Si definimos a las variables $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ como los tiempos entre arribos y S_n como el momento del n-ésimo tiempo de llegada entonces tenemos que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i, \quad n \geq 1.$$

La Figura 2.1.1 muestra la relación entre las variables N_t, T_n y S_n.

Proposición 3. *T_n para $n \in \mathbb{N}$ son v.a.i.i.d. con distribución exponencial de media $1/\lambda$. Además, $S_n \sim \mathrm{Ga}(n, \lambda)$*

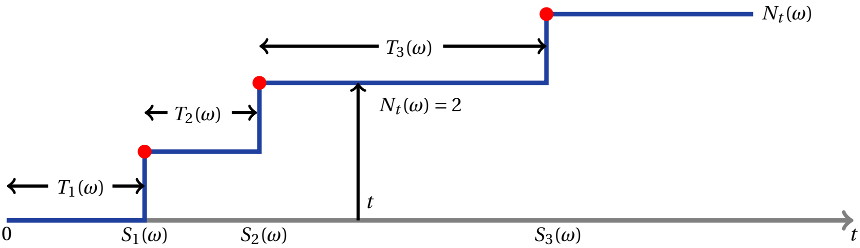

Figura 2.1.1: Ejemplo de trayectoria de N_t

Una relación que se utiliza frecuentemente es

$$N_t \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t$$

Proposición 4. $\mathbb{P}[T_1 < s | N_t = 1] = \frac{s}{t}$

Proposición 5. *Dado $N_t = n$, los tiempos de llegada $S_1, \ldots, S_n$ tienen la misma distribución que las estadísticas de orden correspondientes a n v.a.i.i.d. con distribución* $\mathrm{U}(0, t)$

2.2. Generalizaciones del proceso Poisson

2.2.1. Proceso Poisson no homogéneo

Definición 6 (Proceso Poisson no homogéneo)**.** *Un proceso de conteo* $\{N_t : t \geq 0)\}$ *se dice que es un proceso poisson no homogéneo con función de intensidad* $\lambda(t)$ *(con* $\lambda(t)$ *positiva y localmente integrable),* $t \geq 0$*, si*

1. $N_0 = 0$.
2. *Tiene incrementos independientes.*
3. $\mathbb{P}[N_h = 1] = \lambda(t)h + o(h)$.
4. $\mathbb{P}[N_h \geq 2] = o(h)$.

Proposición 6. *Sea N proceso Poisson no homogéneo de parámetro $\lambda(t)$, entonces $N_{t+s} - N_s \sim \mathrm{Po}(\Lambda(t+s) - \Lambda(s))$ para $s, t \geq 0$, con*

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds.$$

A la función Λ se le llama función de intensidad.

Proposición 7. *Sea N proceso Poisson no homogéneo de parámetro $\lambda(t)$. Sean $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ sus tiempos interarribo, y sean $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ los tiempos reales de ocurrencia, entonces:*

1. $f_{T_1}(t) = e^{-\Lambda(t)} \lambda(t)$.

2. $f_{T_2|T_1}(t|s) = e^{-\Lambda(t+s)+\Lambda(s)} \lambda(t+s)$.

3. $f_{T_2}(t) = \int_0^\infty e^{-\Lambda(t+s)} \lambda(t+s)\lambda(s) ds$.

4. $f_{S_n}(t) = e^{-\Lambda(t)} \dfrac{[\Lambda(t)]^{n-1}}{(n-1)!} \lambda(t)$.

5. $F_{T_k|S_{k-1}}(t|s) = 1 - e^{-\Lambda(t+s)+\Lambda(s)}$.

6. $F_{T_k}(t) = 1 - \int_0^\infty e^{-\Lambda(t+s)} \dfrac{[\Lambda(s)]^{k-2}}{(k-2)!} \lambda(s) ds$, *para $k \geq 2$.*

Proposición 8. *Sea N proceso Poisson no homogéneo de parámetro $\lambda(t)$ y función de intensidad $\Lambda(t)$. Se define*

$$\Lambda^{-1}(t) = \operatorname{ínf}\{u \geq 0 : \Lambda(u) \geq t\}.$$

Entonces, el proceso $\{N_{\Lambda^{-1}(t)} : t \geq 0\}$ es un proceso Poisson homogéneo de parámetro $\lambda = 1$.

2.2.2. Proceso Poisson compuesto

Definición 7 (Proceso Poisson compuesto)**.** *Un proceso* $\{S_t : t \geq 0)\}$ *se dice que es un proceso poisson compuesto con distribución de renovación F y parámetro* $\lambda > 0$*, si se puede representar como*

$$S_t = \sum_{n=0}^{N_t} X_n$$

donde N_t *es un proceso Poisson de parámetro* λ*, para el índice* 0 *se tiene que* $X_0 = 0$ *y para* $n \geq 1$ *la sucesión* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *son v.a.i.i.d. con distribución* F*, y* N_t *y* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *son independientes.*

Proposición 9. *El proceso Poisson compuesto N tiene las siguientes propiedades:*

1. *Tiene incrementos independientes y estacionarios.*
2. $\mathbb{E}[S_t] = \lambda t \mathbb{E}[X_1]$.
3. $\mathbb{V}(S_t) = \lambda t \mathbb{E}\left[X_1^2\right]$.
4. $\mathbb{C}\mathrm{ov}(S_t, S_r) = \lambda \mathbb{E}\left[X_1^2\right] \text{mín}\{t, r\}$.
5. $M_{S_t}(u) = \mathbb{E}\left[e^{uS_t}\right] = \exp\left\{\lambda t \left(M_{X_1}(u) - 1\right)\right\}$.

CAPÍTULO 3

ESPERANZA CONDICIONAL

Definición 8 (Definiciones caso discreto)**.** *Sean X y Y v.a. discretas, y sea $y \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{P}\left[Y = y\right] > 0$. Entonces tenemos las siguientes tres definiciones*

1. *Densidad condicional de X dado $Y = y$*

$$f_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}\left[X = x|Y = y\right] = \frac{\mathbb{P}\left[X = x, Y = y\right]}{\mathbb{P}\left[Y = y\right]}.$$

2. *Distribución condicionada de X dado $Y = y$*

$$F_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}\left[X \leq x|Y = y\right].$$

3. *Esperanza condicionada de X dado $Y = y$*

$$\mathbb{E}\left[X|Y = y\right] = \int x dF(x|y) = \sum_x x\mathbb{P}\left[X = x|Y = y\right].$$

Definición 9 (Definiciones caso discreto)**.** *Sean X y Y v.a. continuas, y sea $y \in \mathbb{R}$ tal que $f_Y(y) > 0$. Entonces tenemos las siguientes tres definiciones*

1. *Densidad condicional de X dado $Y = y$*

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

2. *Distribución condicionada de X dado $Y = y$*

$$F_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}\left[X \leq x|Y = y\right] = \int f_{X|Y}(x|y)dx.$$

3. *Esperanza condicionada de X dado $Y = y$*

$$\mathbb{E}\left[X|Y = y\right] = \int x dF(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y).$$

Definición 10 (Definición informal de esperanza condicional)**.** *Sea X y Y variables aleatorias, con $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Definimos a la variable aleatoria $\mathbb{E}[X|Y]$ como la variable aleatoria que se obtiene a través de los siguientes pasos*

1. *Definimos la función h como $h(y) = \mathbb{E}\left[X|Y = y\right]$.*

2. *Definir la v.a. $\mathbb{E}[X|Y]$ como $\mathbb{E}[X|Y] = h(Y)$*

Pensemos un poco en la idea intuitiva atrás de la última definición. Supongamos que $Y = y$. Condicionado a esto, las probabilidades de X tienen densidad $f_{X|Y}(x|y)$, lo cual se puede tomar como una función de y. El valor esperado de esta distribución, $\mathbb{E}\left[X|Y = y\right] = \sum_x x f_{X|Y}(x|y)$, es llamado esperanza condicional de X dado $Y = y$ (esperanza condicional evaluada), y visto como función de y se puede escribir como $h(y) = \mathbb{E}\left[X|Y = y\right]$. Entonces, el valor de la esperanza condicional depende del valor que haya tomado la variable Y. Si no conociéramos el valor que tomó la variable Y, entonces sería una variable aleatoria que depende de Y. Por lo tanto definimos a la esperanza condicional como $\mathbb{E}[X|Y] = h(Y)$.

Proposición 10 (Propiedad fundamental de la esperanza condicional)**.** *Sea X y Y variables aleatorias, con $\mathbb{E}[X] < \infty$, entonces*

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$$

Demostración.

Caso discreto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] &= \mathbb{E}[h(Y)] \\
&= \sum_y h(y)\mathbb{P}\left[Y=y\right] \\
&= \sum_y \mathbb{E}\left[X|Y=y\right]\mathbb{P}\left[Y=y\right] \\
&= \sum_y \sum_x x\mathbb{P}\left[X=x|Y=y\right]\mathbb{P}\left[Y=y\right] \\
&= \sum_y \sum_x x\mathbb{P}\left[X=x, Y=y\right] \\
&= \sum_x x \sum_y \mathbb{P}\left[X=x, Y=y\right] \\
&= \sum_x x\mathbb{P}[X=x] \\
&= \mathbb{E}[X].
\end{aligned}$$

Caso continuo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] &= \mathbb{E}[h(Y)] \\
&= \int h(y) f_Y(y)dy \\
&= \int \mathbb{E}\left[X|Y=y\right] f_Y(y)dy \\
&= \int\int x f_{X|Y}(x|y)dx f_Y(y)dy \\
&= \int\int x f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)dxdy \\
&= \int\int x f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int x \int f_{X,Y}(x,y)dydx \\
&= \int x f_X(x)dx \\
&= \mathbb{E}[X].
\end{aligned}$$

□

Definición 11 (Definición informal de esperanza condicional con varias variables)**.** *Sean $X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ variables aleatorias, con $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Definimos a la variable aleatoria $\mathbb{E}[X|Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$ como la variable aleatoria que se obtiene a través de los siguientes pasos*

1. *Definimos la función h como* $h(y_1, y_2, \dots, y_n) = \mathbb{E}\left[X|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n\right]$.

2. *Definir la v.a. $\mathbb{E}[X|Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$ como* $\mathbb{E}[X|Y_1, Y_2, \dots, Y_n] = h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$

Proposición 11 (Propiedades de la esperanza condicional)**.** *La esperanza condicional tiene las siguientes propiedades.*

1. ***Linealidad:*** *Dadas las variables aleatorias X, Y y Z, con $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$. , y las constantes a y b, se tiene lo siguiente:*

$$\mathbb{E}[aX + bY|Z] = a\mathbb{E}[X|Z] + b\mathbb{E}[Y|Z].$$

2. ***Independencia:*** *Si X es independiente de Y, entonces*

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X].$$

3. ***Intercambio de la condición:*** *Dadas las variables aleatorias X, Y y Z, se tiene lo siguiente:*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]|Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Z]|Y].$$

4. ***Importancia de la información:*** *Dadas las variables aleatorias X, Z_1 y Z_2, se tiene lo siguiente:*

$$\mathbb{E}[X|Z_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Z_1, Z_2]|Z_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Z_1]|Z_1, Z_2].$$

Capítulo 4

Martingalas

En este capítulo estudiaremos a los procesos llamados martingalas. Dado que la definición de estos procesos está en términos de una esperanza condicional se recomienda al lector repasar el Capítulo 3.

Definición 12 (Martingala a tiempo discreto)**.** *Un proceso $M = \{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una martingala a tiempo discreto si cumple lo siguiente:*

1. $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$.

2. $\mathbb{E}[M_{n+1}|M_1,\ldots,M_n] = M_n$.

Observación 1.

- *Si M es una martingala a tiempo discreto entonces se tiene que su esperanza es la misma para cada n, dado que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1}|M_1,\ldots,M_n]] \\ &= \mathbb{E}[M_n].\end{aligned}$$

Aplicando la igualdad anterior $(n-1)$-veces más, se obtiene que $\mathbb{E}[M_n+1] = \mathbb{E}[M_1]$. Es decir, una martingala tiene esperanza constante.

- *Se tiene que* $\mathbb{E}\left[M_{n+m}|M_1,\ldots,M_n\right] = M_n$, *ya que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{n+m}|M_1,\ldots,M_n\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_{n+m}|M_1,\ldots,M_{n+m-1}\right]|M_1,\ldots,M_n\right]\\ &= \mathbb{E}\left[M_{n+m-1}|M_1,\ldots,M_n\right],\end{aligned}$$

en la primera igualdad se utilizó Proposición 11 Punto 4. Por otro lado, iterando esta última igualdad $(m-1)$*-veces más obtenemos*

$$\mathbb{E}\left[M_{n+m}|M_1,\ldots,M_n\right] = \ldots = \mathbb{E}\left[M_n|M_1,\ldots,M_n\right] = \mathbb{E}\left[M_1\right].$$

Ejemplo 1. *Sean* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *v.a.i.i.d. con esperanza igual a cero. Se define* $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$. *Demostremos que el proceso* $Z = \{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una martingala a tiempo discreto.*

1. $\mathbb{E}\left[Z_n\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[X_i\right] = \sum_{i=1}^n 0 = 0 < \infty$. *Como la esperanza de* Z_n *es finita, entonces la esperanza de* $|Z_n|$ *también es finita.*[1]

2. *Por otro lado,*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{n+1}|M_1,\ldots,M_n\right] &= \mathbb{E}\left[X_{n+1}+M_n|M_1,\ldots,M_n\right]\\ &\quad (\textit{linealidad de la esperanza condicional})\\ &= \mathbb{E}\left[X_{n+1}|M_1,\ldots,M_n\right]+\mathbb{E}\left[M_n|M_1,\ldots,M_n\right]\\ &\quad (\textit{Independencia de } X_{n+1} \textit{ con } M_1,\ldots,M_n)\\ &= \mathbb{E}\left[X_{n+1}\right]+M_n\\ &= M_n.\end{aligned}$$

Ejemplo 2. *Sea* Y *una martingala tal que* $\mathbb{E}\left[Y_n^2\right] < \infty$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que, para* $i \leq j \leq k$, $\mathbb{E}\left[(Y_k - Y_j)Y_y\right] = 0$, *y* $\mathbb{E}\left[(Y_k - Y_j)^2|Y_1,\ldots,Y_i\right] = \mathbb{E}\left[Y_k^2|Y_1,\ldots,Y_i\right] - \mathbb{E}\left[Y_j^2|Y_1,\ldots,Y_i\right]$.

1. *Para* $r \geq i$ *tenemos*

$$\mathbb{E}\left[Y_r Y_i\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y_r Y_i|Y_1,\ldots,Y_i\right]\right] = \mathbb{E}\left[Y_i\mathbb{E}\left[Y_r|Y_1,\ldots,Y_i\right]\right] = \mathbb{E}\left[Y_i^2\right],$$

[1]Veamos que $\mathbb{E}[X] < \infty$ si solo si $\mathbb{E}[X] < \infty$. Definimos $X^+ = \text{máx}\{X,0\}$ y $X^- = -\text{mín}\{X,0\}$; entonces se cumple que $X = X^+ - X^-$ y $|X| = X^+ + X^-$. Entonces $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[X^+\right] - \mathbb{E}\left[X^-\right]$ y $\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}\left[X^+\right] + \mathbb{E}\left[X^-\right]$. Por lo tanto, si suponemos que $\mathbb{E}[X] < \infty$ entonces $\mathbb{E}\left[X^+\right] < \infty$ y $\mathbb{E}\left[X^-\right] < \infty$, lo cual implica que $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Análogamente si suponemos que $\mathbb{E}[|X|] < \infty$.

lo cual no depende de r. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}\left[(Y_k - Y_j)\,Y_y\right] = \mathbb{E}\left[Y_k Y_i\right] - \mathbb{E}\left[Y_j Y_i\right] = 0.$$

2. *Por otro lado,*

$$\mathbb{E}\left[(Y_k - Y_j)^2 | Y_1, \ldots, Y_i\right] = \mathbb{E}\left[Y_k^2 | Y_1, \ldots, Y_i\right] - 2\mathbb{E}\left[Y_k Y_j | Y_1, \ldots, Y_i\right] + \mathbb{E}\left[Y_j^2 | Y_1, \ldots, Y_i\right],$$

como

$$\mathbb{E}\left[Y_k Y_j | Y_1, \ldots, Y_i\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y_k Y_j | Y_1, \ldots, Y_j\right] | Y_1, \ldots, Y_i\right] = \mathbb{E}\left[Y_j^2 | Y_1, \ldots, Y_i\right]$$

Observación 2. *Para facilitar la notación utilizaremos lo siguiente.*

- *Dado un proceso a tiempo discreto M_n definimos $\mathscr{F}_n^M$ como $\mathscr{F}_n^M = \{M_i\}_{i=0}^n$.*
- *Dado un proceso a tiempo continuo M_t definimos $\mathscr{F}_t^M$ como $\mathscr{F}_t^M = \{M_s\}_{0 \le s \le t}$.*

Definición 13 (Martingala a tiempo continuo)**.** *Un proceso $M = \{M_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ es una martingala a tiempo continuo si cumple lo siguiente:*

1. $\mathbb{E}\left[|M_t|\right] < \infty$.
2. $\mathbb{E}\left[M_t | \mathscr{F}_s^M\right] = M_s$ *para $s < t$.*

Capítulo 5

Movimiento Browniano

5.1. Definiciones equivalentes

Definición 14 (Primera definición de MB)**.** *Se dice que $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano de parámetro σ^2 si cumple que:*

1. $B_0 = 0$ *c.s.*
2. *Tiene trayectorias continuas c.s. (i.e.,* $\mathbb{P}\left[B_t \textit{sea una función contiua}\right] = 1$*).*
3. *Tiene incrementos independientes. Si $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ entonces $B_{t_2} - B_{t_1} \perp\!\!\!\perp B_{t_4} - B_{t_3}$; es decir, que para cualesquiera $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ se tiene que*
$$\mathbb{P}\left[B_{t_2} - B_{t_1} \leq b_1, B_{t_4} - B_{t_3} \leq b_2\right] = \mathbb{P}\left[B_{t_2} - B_{t_1} \leq b_1\right]\mathbb{P}\left[B_{t_4} - B_{t_3} \leq b_2\right]$$
4. *Para cualesquiera tiempos $0 \leq s < t$, la variable aleatoria $B_t - B_s \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2(t-s))$; es decir, para todo $t \in \mathbb{R}$*
$$f_{B_t - B_s}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} e^{-x^2/2\sigma^2(t-s)}$$

Definición 15 (Segunda definición de MB)**.** *Se dice que $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano de parámetro σ^2 si cumple que:*

1. *$B_0 = 0$ c.s.*

2. *Tiene trayectorias continuas c.s. (i.e., $\mathbb{P}\left[B_t \text{sea una función contiua}\right] = 1$).*

3. *Para cualesquiera tiempos $0 < t_1 < \ldots < t_n$ y cualesquiera $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, se cumple que*

$$\mathbb{P}\left(B_{t_1} \le b_1, \ldots, B_{t_n} \le b_n\right) =$$
$$\int_{\infty}^{b_1} \cdots \int_{\infty}^{b_2} p(t_1, 0, x_1)\, p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \ldots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)\, dx_n \cdots dx_1,$$

con

$$p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-(x-y)^2/2\sigma^2 t}. \tag{5.1.1}$$

5.2. Algunas propiedades

Theorema 2. *La definición 14 y definición 15 son equivalentes.*

Observación 3. *A la función $p(t,x,y)$ definida por Ecuación (5.1.1) se le llama función de probabilidad de transición del MB. En particular, la probabilidad de que un MB que inicia en $x$se encuentre en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$después de t unidades de tiempo es*

$$p(t,x,A) = \int_A p(t,x,y)\, dy.$$

Theorema 3. *El movimiento Browniano es un proceso de Markov.*

Theorema 4. *El movimiento Browniano es una martingala continua.*

5.3. Ejemplos

Ejemplo 3.
Sea B_t un MB de parámetro σ^2. Definimos

$$W_t = B_{t+h} - B_h$$

para $h > 0$. Veamos que W_t es MB ya que cumple la definición 14:

1. *$W_0 = B_h - B_h = 0$; es decir, cumple el Punto 1 de la definición 14.*

2. *Como B_t tiene trayectorias continuas y la resta de funciones continuas es continua, entonces W_t tiene trayectorias continuas; es decir, cumple el Punto 2 de la definición 14.*

3. *Si $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, entonces*

$$\begin{aligned} W_{t_2} - W_{t_1} &= (B_{t_2+h} - B_h) - (B_{t_2+h} - B_h) \\ &= B_{t_2+h} - B_{t_2+h}, \end{aligned}$$

   y

$$\begin{aligned} W_{t_4} - W_{t_3} &= (B_{t_4+h} - B_h) - (B_{t_3+h} - B_h) \\ &= B_{t_4+h} - B_{t_3+h}, \end{aligned}$$

   Como los incrementos del MB son independientes tenemos que $B_{t_2+h} - B_{t_2+h} \perp\!\!\!\perp B_{t_4+h} - B_{t_3+h}$. Por lo tanto, $W_{t_2} - W_{t_1} \perp\!\!\!\perp W_{t_4} - W_{t_3}$; es decir, cumple el Punto 3 de la definición 14.

4. *Sea $0 \leq s < t$, entonces la variable aleatoria $W_t - W_s = (B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h) = B_{t+h} - B_{s+h}$. Utilizando que B_t es MB, tenemos que $B_{t+h} - B_{s+h} \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2((t+h) - (s+h)) = \mathrm{N}(0, \sigma^2(t-s))$; es decir, cumple el Punto 4 de la definición 14.*

Por lo tanto W_t es MB de parámetro σ^2, ya que cumples la definición 14. ***Con lo cual hemos demostrado que traslaciones del MB también son MB.***

Ejemplo 4.
Sea B_t un MB de parámetro σ^2. Definimos

$$W_t = cB_{t/c^2}$$

para $h > 0$. Veamos que W_t es MB ya que cumple la definición 14:

1. *$W_0 = cB_{0/c^2} = cB_0 = 0$; es decir, cumple el Punto 1 de la definición 14.*

2. *Como B_t tiene trayectorias continuas y combinaciones lineales de funciones continuas es una función continua, entonces W_t tiene trayectorias continuas; es decir, cumple el Punto 2 de la definición 14.*

3. *Si $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, entonces*

$$\begin{aligned} W_{t_2} - W_{t_1} &= cB_{t_2/c^2} - cB_{t_1/c^2} \\ &= c(B_{t_2/c^2} - B_{t_1/c^2}), \end{aligned}$$

   y

$$\begin{aligned} W_{t_4} - W_{t_3} &= cB_{t_4/c^2} - cB_{t_3/c^2} \\ &= c(B_{t_4/c^2} - B_{t_3/c^2}), \end{aligned}$$

   Como los incrementos del MB son independientes tenemos que $B_{t_2/c^2} - B_{t_1/c^2} \perp\!\!\!\perp B_{t_4/c^2} - B_{t_3/c^2}$. Por lo tanto, $W_{t_2} - W_{t_1} \perp\!\!\!\perp W_{t_4} - W_{t_3}$; es decir, cumple el Punto 3 de la definición 14.

4. *Sea $0 \leq s < t$, entonces la variable aleatoria $W_t - W_s = cB_{t/c^2} cB_{s/c^2} = c(B_{t/c^2} - B_{s/c^2})$. Utilizando que B_t es MB, tenemos que $B_{t/c^2} - B_{s/c^2} \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2(t/c^2 - s/c^2) = \mathrm{N}\left(0, (\sigma^2/c^2)(t-s)\right)$. Lo anterior implica que $W_t - W_s \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2(t-s))$[1] es decir, cumple el Punto 4 de la definición 14.*

Por lo tanto W_t es MB de parámetro σ^2, ya que cumples la definición 14. ***Con lo cual hemos demostrado que contracciones del MB también son MB.***

Ejemplo 5. *Demostremos lo siguiente para B_t MB de parámetro σ^2 se cumple que $\mathbb{E}[B_t B_s] = \mathrm{Cov}(B_t, B_s)$. Para ello, utilizaremos que para $s < t$ se tiene que $B_s \perp\!\!\!\perp B_t - B_s$. Por un lado,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_s B_t] &= \mathbb{E}\left[B_s B_t - B_s^2 + B_s^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[B_s(B_t - B_s) + B_s^2\right] \\ &= \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s]) + \mathbb{E}\left[B_s^2\right] \\ &= \mathbb{E}[B_s]\,\mathbb{E}[B_t - B_s] + \mathbb{E}\left[B_s^2\right] \\ &= 0 \cdot 0 + \sigma^2 s \\ &= \sigma^2 s \end{aligned}$$

[1] Si $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ y $Y = aX + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $Y \sim \mathrm{N}(\mu a + b, a^2\sigma^2)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(B_t, B_s) &= \mathrm{Cov}(B_t - B_s + B_s, B_s) \\
&= \mathrm{Cov}(B_t - B_s, B_s) + \mathrm{Cov}(B_s, B_s) \\
&= 0 + \mathrm{Var}(B_s) \\
&= \sigma^2 s
\end{aligned}$$

Lo cual demuestro que $\mathbb{E}[B_t B_s] = \mathrm{Cov}(B_t, B_s)$.

Capítulo 6

Apéndices

6.1. Tabla de distribuciones

$X \sim$	$f(x)$	$F(x)$	$\mathbb{E}[X]$	$Var(X)$
Ber(p)	$p^x(1-p)^{1-x}$ $p \in (0,1)$ $x \in \{0,1\}$	-	p	$p(1-p)$
Bin(n,p)	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{1-x}$ $n \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$ $x \in \{0,1,\ldots,n\}$	-	np	$np(1-p)$
Poisson(λ)	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ $\lambda > 0$ $x = 0,1,\ldots$	-	λ	λ
Exp(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$ $\lambda > 0$ $x \geq 0$	$1-e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Ga(α,λ)	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}$ $\lambda > 0, \alpha > 0$ $x \geq 0$	-	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$
Geo(p)	$p(1-p)^x$ $p \in (0,1)$ $x = 0,1,\ldots$	-	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Pareto(a,b)	$ba^b x^{-(b+1)}$ $a > 0, b > 1$ $x \geq a$	$1-\left(\frac{a}{x}\right)^b$	$\frac{ab}{b-1}$ Si $b > 2$	$\frac{a^2 b(b^2-3b+3)}{(b-1)(b-2)}$

6.2. TEOREMAS DE PROBABILIDAD

Theorema 5 (Desigualdad de Jensen)**.** *Sea X una variable aleatoria tal que $\mathbb{E}[X]\infty$ y h una función convexa, entonces*

$$h(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[h(X)] \tag{6.2.1}$$

Theorema 6 (Teorema de Slutsky)**.** *Sean $\{X_n\}$ y $\{Y_n\}$ sucesiones de variables aleatorias tales que $X_n \xrightarrow{d} X$ y $Y_n \xrightarrow{d} c \in \mathbb{R}$ entonces*

$$X_n Y_n \xrightarrow{d} cX, \qquad X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c \tag{6.2.2}$$

Theorema 7 (Desigualdad de Markov)**.** *Sea X una v.a. positiva con esperanza finita. Para cualquier $\varepsilon > 0$*

$$\mathbb{P}[X \geq \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}.$$

Theorema 8 (Desigualdad de Chebyshev)**.** *Sea X una v.a. y f,g funciones monótonas no decrecientes positivas, entonces*

$$\mathbb{E}\left[f(X)g(X)\right] \geq \mathbb{E}\left[f(X)\right]\mathbb{E}\left[g(X)\right].$$

Theorema 9 (Teorema de convergencia monótona)**.** *Sea $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots$, una sucesión de v.a. convergente casi seguramente a una variable aleatoria X, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X].$$

Una mayor referencia de este resultado puede ser consultada en Rolski(1998)[**?**]

Theorema 10 (Ley débil de los grandes números)**.** *Sean $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de v.a.i.i.d. con media μ. Entonces*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty. \tag{6.2.3}$$

Theorema 11 (Ley fuerte de los grandes números)**.** *Sean $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de v.a.i.i.d. con media μ. Entonces*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{c.s.} \mu \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty. \tag{6.2.4}$$

Theorema 12 (Teorema central del límite)**.** *Sean $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de v.a.i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ y $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Entonces*

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty. \tag{6.2.5}$$

Theorema 13 (Teorema de Wald)**.** *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v.a.i.i.d. con $\mathbb{E}[\mid X_1 \mid] < \infty$ y sea α un tiempo de paro con respecto a estas variables aleatorias tal que $\mathbb{E}[\alpha] < \infty$, entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\alpha} X_i\right] = \mathbb{E}[X_1]\,\mathbb{E}[\alpha]. \tag{6.2.6}$$

6.2.1. Recordatorios

- Funciones hiperbólicas

$$\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Bibliografía