Procesos estocásticos 1
Tarea 3

Profesor: Arrigo Coen Coria
Ayudante: Cristian Uriel Toriz Mendoza

Entrega tarea: Martes 16 de mayo
Examen: Viernes 19 de mayo

Observación 1. *Todas las respuestas tienen que estar bien argumentadas.*

Problemas que se requieren entregar

1. Una variable aleatoria η tiene distribución exponencial con tasa $\lambda > 0$ si $\mathbb{P}(\eta > t) = e^{-\lambda t}$
   a) Calcule la esperanza y varianza de η
   b) Demuestre que $\mathbb{P}(\eta > t + s) = \mathbb{P}(\eta > t)\mathbb{P}(\eta > s)$
   c) Demuestre que el inciso anterior es equivalente a decir que:
   $$\mathbb{P}(\eta > t + s|\eta > s) = \mathbb{P}(\eta > t)$$
2. Muestre que la distribución exponencial es la única que satisface la propiedad de pérdida de memoria. $\{\mathbb{P}(\eta > s+t|\eta > t) = \mathbb{P}(\eta > s)\}\ \ \forall s, t \geq 0$
3. Sea $\eta_1, \eta_2, ...$ una sucesión de v.a.i.i.d con distribución exponencial de tasa λ. Considere $\xi_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$ y defina $N(t) = max\{n : t \geq \xi_n\}$.
   a) Demuestre que N(t) tiene distribución Poisson con parámetro λt
   b) Calcule $\mathbb{E}[N(t)]$
4. Demuestre que $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ a.s
5. Muestre ques $N(t)$ es un P.P.(λ), entonces:
   $$\mathbb{P}(N(t)\ sea\ impar) = e^{-\lambda t}\sinh(\lambda t)$$
   $$\mathbb{P}(N(t)\ sea\ par) = e^{-\lambda t}\cosh(\lambda t)$$
6. Demuestre que $\lim_{t\to\infty} \dfrac{N(t)}{t} = \lambda$ c.s.
   Hint: Use la Ley Fuerte de los Grandes Números.
7. Supón que los imperfectos en una carretera son modelados por un proceso de Poisson con media λ=.05 por km. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya imperfectos los primeros cinco kilómetros de carretera? Si no hay imperfectos en los primeros tres kilómetros, ¿ cuál es la probabilidad de que tampoco los haya en el cuarto kilómetro?
8. La tienda X abre a las 8:00 y tiene un promedio de 7 clientes por hora, se modela el número de clientes con un proceso de Poisson. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente entre un cliente antes de las 8:15, y que en total ocho hayan ingresado a la tienda antes de las 13:00?
9. Sea N(t) un proceso Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Considerando $0 < s < t$ y $0 \leq k \leq n$,
   $$\mathbb{P}(N(s) = k|N(t) = n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}$$
10. Considere un proceso de Poisson compuesto que modela el número de clientes durante un día en una tienda, que en promedio tiene 56 clientes y cada uno hace un gasto aproximado de \$270 con una desviación de \$30. Calcule el ingreso promedio por día, así como la varianza del ingreso total por día.

Problemas que no se requieren entregar

1. Sean $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ dos procesos Poisson independientes con intensidad λ,μ respectivamente. Demuestra que $\{N(t) + M(t)\}_{t\geq 0}$ es un proceso Poisson, determina su intensidad.

2. Sea $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ un proceso Poisson con intensidad λ, suponemos que cada llegada es del tipo i con probabilidad p_i, independiente de cualquier otra llegada $i = 1, 2, \cdots, d$ y $\sum_{i=1}^{d} p_i = 1$. Definimos $\{N_i(t)\}_{t\geq 0}$ el proceso que cuenta las llegadas del tipo i. Demuestra que $\{N_i(t)\}_{t\geq 0}$, $i = 1, 2, \cdots, d$, son d procesos poisson independientes, con intensidad λp_i respectivamente.

3. Si $\{N_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson con intensidad λ, demuestra que

   a) $Cov(N_s, N_t) = \lambda \min\{s, t\}$

   b) Si $0 \leq s < t$, entonces $\mathbb{P}[N_s = 0, N_t = 1] = \lambda(t - s)e^{-\lambda t}$.

   c) Si $0 \leq s < t$, entonces $\mathbb{P}[N_s = N_t] = e^{-\lambda(t-s)}$.

4. Sea $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson y sea T una variable aleatoria independiente del proceso de Poisson y con distribución $Gamma(\alpha, \theta)$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Encuentra la distribución de $N(T)$.

5. Sean $N_1(t), \cdots, N_n(t)$ procesos de Poisson independientes con parámetro común $\lambda > 0$. Encuentra la distribución del primer momento en el cual

   a) al menos un evento ha ocurrido en cada uno de los procesos

   b) ocurre el primer evento en alguno de los procesos

6. Supón que $N_1(t)$ y $N_2(t)$ son procesos Poisson independientes con tazas λ_1, λ_2 respectivamente. Sea $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ calcula la probabilidad de que el primer evento del proceso combinado $N(t)$ sea de N_1.

7. Sea $N(t)$ un proceso Poisson y sea S_n el tiempo de ocurrencia del n-ésimo evento. Calcula

   a) $\mathbb{E}[S_4]$

   b) $\mathbb{E}[S_4 | N(1) = 2]$

   c) $\mathbb{E}[N(4) - N(2) | N(1) = 3]$

8. Sea $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ un proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t)$ continua y estrictamente positiva. Definimos

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds.$$

   Sea $M(t) = N(m^{-1}(t))$. Demuestra que M es un proceso Poisson homogéneo y determina su intensidad.

¡SUERTE!